随机噪声作用下梁结构的非线性振动研究

王龙飞[1],崔璐[2],黄棣[1],韩志军[1]

(1.太原理工大学生物医学工程学院,030024 太原;2.太原理工大学信息化管理与建设中心,030024 太原)

摘　要:考虑随机噪声影响,研究一端固支一端夹支的梁结构在横向外激励扰动下的非线性振动。首先,基于里兹-伽辽金法得到梁的振动控制方程并将其无量纲化,随后引入随机噪声进一步得到系统的随机动力学模型。在此基础上考虑高斯白噪声和有界噪声,分别研究2种随机噪声对梁结构随机动力学行为的影响,并利用随机Melnikov法求出系统的混沌阈值,得到2种随机噪声影响下系统的三维混沌阈值图。由数值计算结果可知,阻尼系数、外激励幅值和随机噪声对梁结构的振动都有影响,且阻尼小、外激励幅值大和随机噪声强都更容易导致随机系统产生混沌运动。此外,通过本研究可以分析比较不同随机噪声(如高斯白噪声和有界噪声)对梁结构振动状态的影响,从而以抑制梁结构在随机噪声影响下产生混沌运动为目的,提出更好的降噪方法。

关键词:随机噪声;随机Melnikov法;混沌;非线性动力学;随机动力学

中图分类号:O324　　**文献标志码:**A

Nonlinear vibration of the beam structure with the effects of random noises

WANG Longfei[1],CUI Lu[2],HUANG Di[1],HAN Zhijun[1]

(1. Department of Biomedical Engineering,Taiyuan University of Technology,030024 Taiyuan,China;
2. Center of Information Management and Development,Taiyuan University of Technology,030024 Taiyuan,China)

Abstract: The nonlinear dynamic behavior of a clamped-fixed beam with the effects of the external excitation and random noise is studied in this paper. First,the governing equation of the beam is proposed based on the Ritz-Galerkin method. Then the dimensionless form of the equation is developed and the random noise is considered. On the basis of it,the random dynamic behavior of the beam with the effects of two random noises, i. e. , Gaussian white noise and bounded noise, are investigated respectively. The chaos threshold of the random system can be obtained according to the random-Melnikov method and the corresponding 3-dimensional diagram reflecting the chaos threshold of the system can be plotted. The simulated results show that the damping coefficient,the excitation amplitude,and the random noise all affect the motion state of the random system,and the chaotic motion of the system is observed more easily when small damping coefficient,great excitation amplitude,and strong random noise are considered. Moreover,the in-

收稿日期:2021-12-03　　　**修回日期:**2022-04-14
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No.11502158)
通信作者:王龙飞,讲师。E-mail:wlfpal@163.com
引用格式:王龙飞,崔璐,黄棣,等.随机噪声作用下梁结构的非线性振动研究[J].应用力学学报,2022,39(4):784-790.
WANG Longfei, CUI Lu, HUANG Di, et al. Nonlinear vibration of the beam structure with the effects of random noises[J]. Chinese journal of applied mechanics,2022,39(4):784-790.

fluences of different random noises on the vibration of the beam structure can be analyzed, which enables a better noise reduction method to be found for avoiding the chaotic vibration of the beam caused by random noises.

Key words: random noise; random-Melnikov method; chaos; nonlinear dynamics; stochastic dynamics

动力学系统的混沌运动研究最初由“三体”问题演化而来,是近 20 年发展起来的非线性动力学系统中一种特殊运动方式的研究。已有研究表明系统在周期外激励作用下可以产生混沌运动[1],而在实际情况中还要考虑噪声环境等多种因素对系统振动的影响,因此由噪声等随机激励引起的系统稳定性问题一直受到了国内外学者的高度关注[2-5]。

Fuller[6]较早将非线性随机系统描述成在随机外载激励下的耗散 Hamilton 系统。到了 90 年代中期,文献[7-8]首次得到了非能量等分下的非线性随机系统的精确平稳解,并随后研究了随机拟 Hamilton 系统的稳定性问题和 Hopf 分岔问题。Ariaratnam 等[9]研究了谐和力参激下的 Duffing 系统的混沌运动。在此基础上,Xie[10]将 Melnikov 函数[11]加以修正,获得了白噪声激励下系统的混沌阈值,并将这种方法发展为随机 Melnikov 法。随后,越来越多的学者使用这种方法来研究随机激励下系统的混沌条件问题。甘春标等[12]以受高斯白噪声激励下的 Duffing 系统为例,研究了随机 Melnikov 法、相流函数和安全盆法求解系统稳定性的差异,结果表明 3 种方法在计算系统稳定性阈值方面具有一致性。徐明等[13]建立了考虑高斯白噪声影响因素下的超导约瑟夫森结构力学模型,并讨论了噪声强度对该结构的影响。王振佩等[14]研究了有界噪声激励下约瑟夫森系统的混沌运动。唐涛[15]采用多尺度法和随机平均法,研究了受随机参数激励的 Duffing 振子的 p 阶矩稳定性问题。杨少冲[16]考虑频域分析,采用了模态降阶-等效线性化-有限元相结合的方法研究了噪声激励下壁板结构的随机振动响应。刘宇飞等[17]研究了理想白噪声、限宽白噪声和连续限宽白噪声 3 种噪声信号对结构振动的影响,并以广州新电视塔为研究对象提出了结构控制优化的设计方法。此外,复杂激励下系统的随机振动研究近些年来在生产生活中也有广泛的应用[18-21]。

基于此,本研究以一端固支、一端夹支的欧拉-伯努利梁结构为研究对象,根据里兹-伽辽金法得到其在横向激励下振动的控制方程并将方程无量纲化;随后分别研究了该系统在高斯白噪声和有界噪声作用下的非线性动力学响应;利用随机 Melnikov 法得到 2 种噪声下系统进入混沌运动的三维混沌阈值图,从而比较和讨论了 2 种随机噪声对梁结构振动的影响。

1 梁结构的随机振动模型

假设一端固支、一端夹支的欧拉-伯努利梁受 2 个方向的力作用,即轴向载荷 F_0 与横向周期性扰动载荷 $F\cos(\Omega T)$,如图 1 所示。

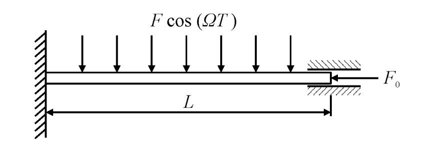


图 1 一端固支一端夹支梁的受载示意图

Fig. 1 Schematic of a loaded fixed-clamped beam

梁的轴向力可以表示为

$$N(X,T) = \frac{1}{L}\int_0^L EA\left(u' + \frac{1}{2}w'^2\right)\mathrm{d}X = F_0 + \frac{EA}{L}\int_0^L \frac{1}{2}w'^2\mathrm{d}X \tag{1}$$

式中:L 为梁的长度(梁被夹支的长度忽略不计);E 为梁的弹性模量;A 为梁的横截面积;X 为横坐标;T 为时间;w 和 u 分别为梁的横向位移和轴向位移;$*'$为对 X 的一阶导数。

欧拉梁的弯矩可以表示为

$$M_X = -EIw'' \tag{2}$$

式中:I 为梁的极惯性矩,与梁横截面的形状及尺寸有关;$*''$表示对 X 的二阶导数。

考虑环境阻尼的影响,梁振动的控制方程可以表示为

$$-M_X'' + (Nw')' + \rho A\ddot{w} + \eta\dot{w} = F\cos(\Omega T) \tag{3}$$

式中:ρ 为梁的材料密度;η 为环境阻尼系数;F 为外激励振幅;$\dot{*}$ 和 $\ddot{*}$ 分别表示对时间 T 的一阶和二阶导数。

将式(1)和式(2)代入到式(3)中,消去轴向位移,可得到用横向位移表达的振动控制方程。将其写为拉格朗日函数形式,表示为

$$L(w)=EIw''''+\left[F_0+\frac{EA}{L}\int_0^L\frac{1}{2}w'^2\mathrm{d}X\right]w''+$$
$$\rho A\ddot{w}+\eta\dot{w}-F\cos(\Omega T)=0 \tag{4}$$

式中：w''''表示对 X 的四阶导数。

根据一端固支一端夹支边界条件，有

$$\begin{cases}w(0,T)=w(L,T)=0\\ w'(0,T)=w'(L,T)=0\end{cases} \tag{5}$$

满足此边界条件的位移方程可以写为

$$w(X,T)=W(T)\left[1-\cos\left(\frac{2\pi}{L}X\right)\right] \tag{6}$$

结合式(4)和式(6)，根据里兹-伽辽金法进行积分可得

$$\int_0^L L(w)\left[1-\cos\left(\frac{2\pi}{L}X\right)\right]\mathrm{d}X=\int_0^L\left\{EIw''''+\right.$$
$$\left[F_0+\frac{EA}{L}\int_0^L\frac{1}{2}w'^2\mathrm{d}X\right]w''+\rho A\ddot{w}+\eta\dot{w}-$$
$$\left.F\cos(\Omega T)\right\}\left[1-\cos\left(\frac{2\pi}{L}X\right)\right]\mathrm{d}X=0 \tag{7}$$

对式(7)进行分部积分，可以得到

$$\frac{8EI\pi^4}{L^3}W-F_0\frac{2\pi^2}{L}W-\frac{2EA\pi^4}{L^3}W^3+$$
$$\frac{3\rho AL}{2}\ddot{W}+\frac{3\eta L}{2}\dot{W}=FL\cos(\Omega T) \tag{8}$$

对式(8)进行无量纲化，可进一步将其简化为duffing 方程的形式，同时引入噪声项[4]，可得

$$r_1\ddot{\varphi}+r_2\dot{\varphi}+r_3(\varphi+r_4\varphi^3)=r_5\cos(\omega t)+r_\delta\delta(t) \tag{9}$$

其中

$$\varphi=\frac{W}{L},t=\omega_0T,\omega=\frac{\Omega}{\omega_0},r_1=\omega_0^2L,$$
$$r_2=\frac{\eta\omega_0L}{\rho A},r_3=\frac{4\pi^2}{3\rho AL}\left(\frac{4\pi^2EI}{L^2}-F_0\right),$$
$$r_4=-\frac{EA\pi^2L^2}{4\pi^2EI-L^2F_0},r_5=\frac{2F}{3\rho A}$$

式中：$\dot{*}$ 和 $\ddot{*}$ 分别表示对无量纲时间 t 的一阶和二阶导数；ω_0 为参考频率。注意，式(9)中引入了$\delta(t)$表示随机噪声激励，r_δ 为随机激励相应的系数[22]。

式(9)即表征梁结构振动情况的随机动力学模型，其中系数 r_2 与系统所受的阻尼有关，r_3 和 r_4 与梁结构的尺寸和物理性能有关，r_5 与周期性载荷的振幅有关。利用式(9)可以定性分析随机系统的振动响应。在该系统中产生的混沌行为即随机混沌。

2 高斯白噪声作用下梁的随机动力学行为

针对随机系统，Melnikov 法同样可以判定该系统混沌运动的发生，即求 Melnikov 函数简单零点。讨论随机 Melnikov[23]过程中是否有简单零点，然后基于均方准则判断系统产生混沌运动的阈值，并得到处于阈值时某些参数之间的关系。

将式(9)的首项归一可得

$$\ddot{\varphi}+s_1\dot{\varphi}+s_2(\varphi+r_4\varphi^3)=s_3\cos(\omega t)+s_\delta\delta(t) \tag{10}$$

其中

$$s_1=\frac{r_2}{r_1},s_2=\frac{r_3}{r_1},s_3=\frac{r_5}{r_1},s_\delta=\frac{r_\delta}{r_1}$$

将式(10)中的阻尼项和等号右边的部分分别提出一个小参数 ε[22]，可得

$$\ddot{\varphi}+\varepsilon q_1\dot{\varphi}+s_2(\varphi+r_4\varphi^3)=\varepsilon[q_2\cos(\omega t)+q_3\delta_1(t)] \tag{11}$$

由式(11)可知，q_1 与系统的阻尼相关，q_2 与外激励的大小相关，q_3 与噪声的大小相关。式(11)的Melnikov 函数可以写为

$$\begin{aligned}M(\tau)&=M_0(\tau)+M_\delta(\tau)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\varphi}\{q_2\cos[\omega(t+\tau)]-q_1\dot{\varphi}\}\mathrm{d}t+\\&\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\varphi}q_3\delta_1(t+\tau)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{12}$$

式(12)将 Melnikov 函数分为两部分，结合留数定理[24]，$M_0(\tau)$可以进一步表示为

$$M_0(\tau)=-q_1\frac{4s_2\sqrt{s_2}}{3s_2r_4}\pm q_2\sqrt{\frac{2}{s_2r_4}}\omega\pi\sin(\omega\tau)\operatorname{sech}\left(\frac{\omega\pi}{2\sqrt{s_2}}\right) \tag{13}$$

$M_0(\tau)$为确定量，与随机激励无关；而 $M_\delta(\tau)$为随机过程，与随机激励是有关的。对于一个随机激励的系统，可以通过判断随机 Melnikov 过程是否有简单零点，并结合均方准则来确定随机系统的混沌阈值。考虑高斯白噪声对系统的影响，可以运用随机 Melnikov 法求解 $M_\delta(\tau)$。

高斯白噪声是一个平稳的随机过程，因此$M_\delta(\tau)$也是一个平稳的随机过程。$M_\delta(\tau)$满足高斯正态分布，因此只需要知道其一阶矩 $E[M_\delta(\tau)]$和

二阶矩 $E[M_\delta^2(\tau)]$，就能够确定函数的统计特征。高斯白噪声的期望是 0，因此 $M_\delta(\tau)$ 的一阶矩为 0，即 $E[M_\delta(\tau)]=0$。$M_\delta(\tau)$ 的二阶矩是功率谱密度在实数域内的积分，因此只需要知道功率谱密度即可求出二阶矩。设 $s_2=r_4=1$，即梁结构的尺寸和物理性能确定，同宿轨道的参数方程可表示为

$$\dot{\varphi}(t)=\pm\sqrt{2}\tanh(t)\operatorname{sech}(t) \tag{14}$$

高斯白噪声的谱密度取 $1/(2\pi)$，由此可以求得功率谱密度在区间 $[-\infty,+\infty]$ 上的积分，即 $M_\delta(\tau)$ 的二阶矩为[25]

$$\begin{aligned} E\left[M_\delta^2(\tau)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} P_{M_\delta}(\omega_\delta)\,\mathrm{d}\omega_\delta \\ &= 2\pi q_3^2\int_{-\infty}^{\infty}\left[P_{\dot{\varphi}}(\omega_\delta)P_\delta(\omega_\delta)\right]\mathrm{d}\omega_\delta \\ &= q_3^2\int_{-\infty}^{\infty}P_{\dot{\varphi}}(\omega_\delta)\,\mathrm{d}\omega_\delta = \frac{4q_3^2}{3} \end{aligned} \tag{15}$$

式中 $P_*(\omega)$ 为相应的功率谱密度。对高斯正态分布存在 $\mu=E[M_\delta(\tau)]=0$，且 $\sigma^2=E[M_\delta^2(\tau)]=\frac{4q_3^2}{3}$。而求混沌阈值时，Melnikov 函数的简单零点是有在均值意义下和均方意义下两种情况的，其中均值意义下的混沌阈值可以表示为

$$\frac{4}{3}q_1=\pm q_2\sqrt{2}\omega\pi\operatorname{sech}\left(\frac{\omega\pi}{2}\right) \tag{16}$$

均方意义下的混沌阈值可以表示为

$$\frac{16q_1^2}{9}=2q_2^2\omega^2\pi^2\operatorname{sech}^2\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)+\frac{4q_3^2}{3} \tag{17}$$

根据式(17)，可以绘制随机系统的三维混沌阈值图。假设 $\omega=1$，则高斯白噪声影响下随机系统的混沌阈值如图 2 所示。

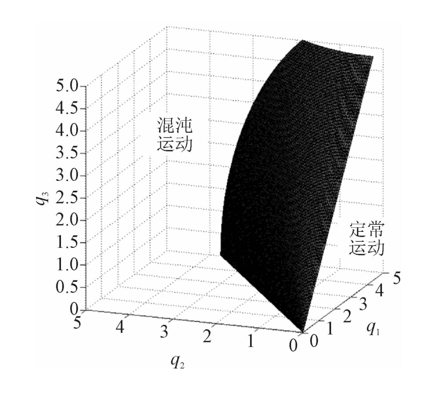


图 2　高斯白噪声影响下随机系统的三维混沌阈值

Fig. 2　The 3D chaos threshold of the random system with the effects of Gaussian white noise

图 2 表明：当空间上某个点 $P(q_1,q_2,q_3)$ 的取值落在该阈值曲面上方时，系统会发生混沌运动；当取值落在曲面下方时，系统进行定常运动。该曲面即代表高斯白噪声下随机系统的三维混沌阈值。

式(17)可以进一步写为

$$\frac{16}{9}=2\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^2\omega^2\pi^2\operatorname{sech}^2\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)+\frac{4}{3}\left(\frac{q_3}{q_1}\right)^2 \tag{18}$$

根据式(18)可以得到与频率 ω 相关的三维混沌阈值，如图 3 所示。

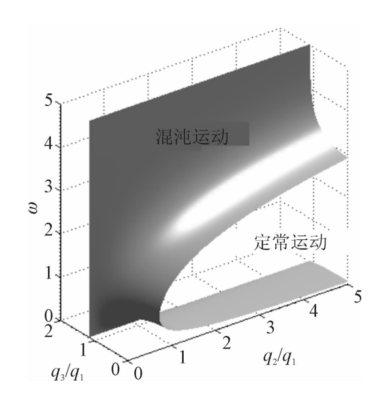


图 3　高斯白噪声影响下关于频率的三维混沌阈值

Fig. 3　The ω-related 3D chaos threshold of the random system with the effects of Gaussian white noise

分析图 3 可知，q_3/q_1 的取值是被制约的，即存在最大值 $(q_3/q_1)_{\max}=2\sqrt{3}/3$。其分布类似于一个无限大平壁。当 q_3/q_1 取定值时，有

$$2\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^2\omega^2\pi^2\operatorname{sech}^2\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)\geqslant\frac{16}{9}-\frac{4}{3}\left(\frac{q_3}{q_1}\right)^2 \tag{19}$$

作为系统是否进入混沌的判据，从式(19)也能证明 q_3/q_1 的最大值问题。结合式(19)与图 3 可知：图 3 所示的内侧中空区域以外是系统进行混沌运动的参数区域；其他部分和中空区域连同，为系统定常运动的区域；整个曲面为考虑 ω 为变量时随机激励下系统的混沌阈值。

3　有界噪声作用下梁的随机动力学行为

本章考虑噪声为有界噪声的情况，其中有界噪声的功率谱密度可以表示为[23]

$$P_\delta(\omega)=\frac{r_6^2}{2\pi}\left[\frac{\zeta^2}{4(\omega-\omega_g)^2+\zeta^4}+\frac{\zeta^2}{4(\omega+\omega_g)^2+\zeta^4}\right] \tag{20}$$

式中：ζ 为噪声强度；ω_g 为平均激励；r_6 为相关系数。

根据式(9)可得

$$\ddot{\varphi}+\varepsilon q_1\dot{\varphi}+s_2(\varphi+r_4\varphi^3)=\varepsilon[q_2\cos(\omega t)+q_4\delta_2(t)] \tag{21}$$

式中：q_4 为有界噪声的幅值参数；$\delta_2(t)$ 为有界噪声。

有界噪声影响下的 Melnikov 函数可以表示为

$$\begin{aligned}M(\tau)&=M_0(\tau)+M_\delta(\tau)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\varphi}\{q_2\cos[\omega(t+\tau)]-q_1\dot{\varphi}\}\mathrm{d}t+\\&\quad\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\varphi}q_4\delta_2(t+\tau)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{22}$$

同样地，在随机 Melnikov 过程中，$M_0(\tau)$ 表示均值部分，$M_\delta(\tau)$ 表示随机部分。

与白噪声相同，有界噪声的 $M_\delta(\tau)$ 的期望值也为 0。为了简化计算和方便比较，取 $s_2=r_4=1$，同宿轨道参数方程为 $\dot{\varphi}(t)=\pm\sqrt{2}\tanh(t)\mathrm{sech}(t)$，可以求得 $M_\delta(\tau)$ 的二阶矩为

$$E[M_\delta^2(\tau)]=\pi q_4^2\zeta^2\int_{-\infty}^{\infty}\omega_\delta^2\mathrm{sech}^2\left(\frac{\omega_\delta\pi}{2}\right)\times\left[\frac{1}{4(\omega_\delta-\omega_g)^2+\zeta^4}+\frac{1}{4(\omega_\delta+\omega_g)^2+\zeta^4}\right]\mathrm{d}\omega_\delta \tag{23}$$

于是，随机 Melnikov 过程在均方意义下有简单零点，即系统达到混沌状态临界条件的情况可写为

$$\pi q_4^2\zeta^2\int_{-\infty}^{\infty}\omega_\delta^2\mathrm{sech}^2\left(\frac{\omega_\delta\pi}{2}\right)\times\left[\frac{1}{4(\omega_\delta-\omega_g)^2+\zeta^4}+\frac{1}{4(\omega_\delta+\omega_g)^2+\zeta^4}\right]\mathrm{d}\omega_\delta+2q_2^2\omega^2\pi^2\mathrm{sech}^2\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)=\frac{16q_1^2}{9} \tag{24}$$

进行数值计算时，取 $\zeta=\omega=1$，且 $\omega_g=2$，则式(24)可以进一步化为

$$\pi q_4^2\int_{-\infty}^{\infty}\omega_\delta^2\mathrm{sech}^2\left(\frac{\omega_\delta\pi}{2}\right)\times\left[\frac{1}{4(\omega_\delta-2)^2+1}+\frac{1}{4(\omega_\delta+2)^2+1}\right]\mathrm{d}\omega_\delta+2q_2^2\pi^2\mathrm{sech}^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{16q_1^2}{9} \tag{25}$$

据此，可以得到有界噪声影响下随机系统的混沌阈值，如图 4 所示。

图 4 表明：当空间内某点 $P(q_1,q_2,q_3)$ 的取值落在该曲面的上方时，系统会产生混沌运动；当落于曲面下方时，系统运动为定常运动；这个曲面代表有界噪声影响下随机系统的三维混沌阈值。

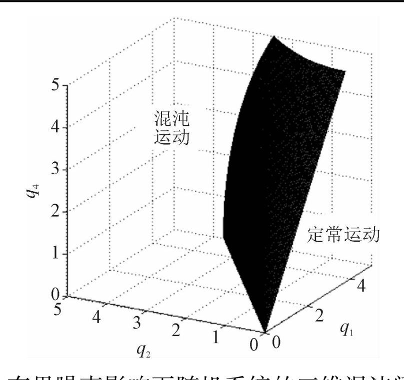


图 4　有界噪声影响下随机系统的三维混沌阈值图

Fig. 4　The 3D chaos threshold of the random system with the effects of bounded noise

4　结果比较与讨论

对比图 2 和图 4，可以得到 2 种噪声影响下随机系统的三维混沌阈值对比图，如图 5 所示。

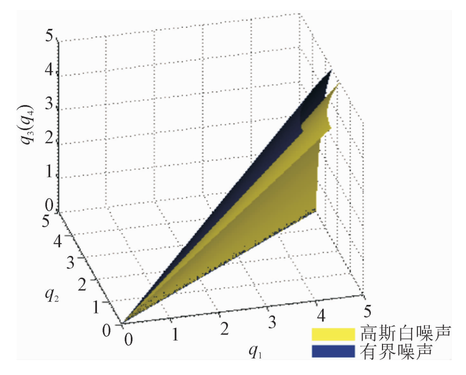


图 5　2 种噪声影响下随机系统的三维混沌阈值对比图

Fig. 5　Comparison of the 3D chaos threshold of the random system with the effects of two different noises

由图 5 不难发现，在本研究算例的噪声参数取值下，若阻尼系数和外激励幅值相同，随机噪声越大，系统越容易产生混沌运动。此外，高斯白噪声比有界噪声更容易使随机系统达到混沌状态，更一般地，可以认为白噪声对随机系统的影响比有色噪声大。此外，对于两种噪声下的随机系统，阻尼越大(即 q_1 越大)，系统越容易发生定常运动；外激励越大(即 q_2 越大)，系统越容易产生混沌运动。由于噪声本身是一种很复杂的随机动力现象，当参数取值变化时，上述关系也可能发生变化。这些都可以利用本研究所使用的方法求出。

有色噪声与白噪声是有一定区别的：白噪声的功率谱密度为定值，而有色噪声的功率谱密度由参数决定的。根据不同的频率范围，有色噪声可以分为红噪声、蓝噪声、黑噪声等，甚至可以出现高斯有

色噪声，而白噪声可以认为是有色噪声中的特例。以不同噪声为随机激励去观察系统的随机动力学行为(包括随机混沌)，实际上可以认为是不同的功率谱密度积分对系统混沌阈值的影响。根据本研究可以从控制随机系统产生混沌运动的角度出发，针对不同的随机噪声提出更好的降噪方法。

5 结　论

基于里兹-伽辽金法得到一端固支一端夹支的欧拉-伯努利梁结构在外力作用下的振动模型，并将该模型无量纲化，引入随机噪声进一步得到系统的随机动力学模型。随后，考虑高斯白噪声和有界噪声对系统振动状态的影响，利用随机 Melnikov 法对随机系统的混沌阈值进行了讨论，并将不同噪声对系统混沌阈值的影响进行了对比。结果表明，阻尼系数、外激励幅值和随机噪声都会对随机系统的运动有影响，且阻尼越大系统越容易发生定常运动；外激励幅值或随机噪声越大系统越容易发生混沌运动。此外，通过两种噪声影响下系统的三维混沌阈值比较可知，本研究算例中高斯白噪声比有界噪声更容易使随机系统达到混沌状态。通过本研究可以以避免梁结构在随机噪声影响下产生混沌运动为目的，提出更有效的降噪方法。

参考文献：

[1] 刘秉正. 非线性动力学[M]. 北京：高等教育出版社，2004.

[2] XU W, HE Q, FANG T, et al. Global analysis of crisis in twin-well Duffing system under harmonic excitation in presence of noise[J]. Chaos solitons & fractals, 2005, 23(1): 141-150.

[3] 雷佑铭，徐伟. 有界噪声和谐和激励联合作用下一类非线性系统的混沌研究[J]. 物理学报，2007，56(9)：5103-5110.
LEI Youming, XU Wei. Homoclinic chaos in averaged oscillator subjected to combined deterministic and narrow-band random excitations[J]. Acta physica Sinica, 2007, 56(9): 5103-5110 (in Chinese).

[4] 戎海武，王向东，徐伟，等. 多频谐和与噪声作用下 Duffing 振子的安全盆侵与混沌[J]. 应用力学学报，2009，26(2)：274-277.
RONG Haiwu, WANG Xiangdong, XU Wei, et al. Bifurcations of safe basins and chaos in softening Duffing oscillator under multi-frequency harmonic and hounded noise excitation[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2009, 26(2): 274-277 (in Chinese).

[5] 郭永峰，董强，娄晓娟，等. 周期信号和非高斯噪声联合激励下 Brusselator 系统的动力学行为[J]. 应用力学学报，2020，37(3)：352-357.
GUO Yongfeng, DONG Qiang, LOU Xiaojuan, et al. Effects of combined periodic force and non-Gaussian noise on dynamic behavior of Brusselator model[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2020, 37(3): 352-357 (in Chinese).

[6] FULLER A. Analysis of nonlinear stochastic systems by means of the Fokker-Planck equation[J]. International journal of control, 1969, 9(6): 603-655.

[7] ZHU W, HUANG Z. Exact stationary solutions of stochastically excited and dissipated partially integrable Hamiltonian systems[J]. International journal of non-linear mechanics, 2001, 36(1): 39-48.

[8] HUANG Z, ZHU W. Lyapunov exponent and almost sure asymptotic stability of quasi-linear gyroscopic systems[J]. International journal of non-linear mechanics, 2000, 35(4): 645-655.

[9] ARIARATNAM S, XIE W, VRSCAY E. Chaotic motion under parametric excitation[J]. Dynamics and stability of systems, 2007, 4(2): 111-130.

[10] XIE W. Effect of noise on chaotic motion of buckled column under periodic excitation[J]. Nonlinear and stochastic dynamics, 1994, 192: 215-225.

[11] GUCKENHEIMER J, HOLMES P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields[J]. Siam review, 1984, 26(4): 600-601.

[12] 甘春标，郭太银. 随机激励下非线性系统稳定性的判定方法与比较[J]. 振动与冲击，2007，26(11)：112-114.
GAN Chunbiao, GUO Taiyin. Comparisons between the methods in determining stability of stochastically nonlinear systems[J]. Journal of vibration and shock, 2007, 26(11): 112-114 (in Chinese).

[13] 徐明，邓从政，曾春花. 高斯白噪声激励下约瑟夫森结的混沌分析[J]. 中国科技论文，2015，10(5)：577-579.
XU Ming, DENG Congzheng, ZENG Chunhua. Chaos analysis of Josephson junction with Gaussian white noise excitation[J]. China science paper, 2015, 10(5): 577-579 (in Chinese).

[14] 王振佩，徐伟. 有界噪声激励下 Josephson 系统的混沌运动[J]. 应用力学学报，2012，29(1)：43-47.
WANG Zhengpei, XU Wei. Chaotic motion of a Josephson system excited by bounded noise[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2012, 29(1): 43-47 (in Chinese).

[15] 唐涛. 噪声激励 Duffing 振子的随机稳定性研究[D]. 南京：南京航空航天大学，2015.

[16] 杨少冲. 噪声激励下壁板结构的几何非线性随机振动响应[D]. 北京：北京工业大学，2018.

[17] 刘宇飞，樊健生. 基于白噪声模型的结构振动响应估计及控制优化[J]. 力学与实践，2018，40(1)：30-38.
LIU Yufei, FAN Jiansheng. Structural response estimation and control optimization based on white noise models[J]. Mechanics in en-

gineering,2018,40(1):30-38(in Chinese).

[18] 杨绍普,李韶华,郭文武. 随机激励滞后非线性汽车悬架系统的混沌运动[J]. 振动·测试与诊断,2005,25(1):22-25.
YANG Shaopu,LI Shaohua,GUO Wenwu. Chaos in vehicle suspension system with hysteretic nonlinearity[J]. Journal of vibration, measurement & diagnosis,2005,25(1):22-25(in Chinese).

[19] 朱海涛,王武国. 基于路径积分法的悬索非线性随机振动响应分析[J]. 应用力学学报,2018,35(3):445-451.
ZHU Haitao,WANG Wuguo. Stochastic response analysis of a nonlinear cable with path integration[J]. Chinese journal of applied mechanics,2018,35(3):445-451 (in Chinese).

[20] 郭永峰,王琳杰,魏芳. Lévy 噪声和高斯白噪声共同激励的 FHN 神经元系统的动力学特性[J]. 应用力学学报,2019,36(4):806-811.
GUO Yongfeng,WANG Linjie,WEI Fang. Dynamic characteristics in FHN neural system driven by Lévy noise and Gaussian white noise[J]. Chinese journal of applied mechanics,2019,36(4):806-811(in Chinese).

[21] 刘婧瑞,陈林聪,赵珧冰. 泊松白噪声激励下斜拉索的面内随机振动[J]. 振动与冲击,2020,39(15):230-236.
LIU Jingrui,CHEN Lincong,ZHAO Yaobing. In-plane random vibration of stay cable system under Poisson white noise excitation [J]. Journal of vibration and shock,2020,39(15):230-236 (in Chinese).

[22] 杨晓丽,徐伟,孙中奎. 谐和激励与有界噪声作用下具有同宿和异宿轨道的 Duffing 振子的混沌运动[J]. 物理学报,2006,55(4):1678-1686.
YANG Xiaoli,XU Wei,SUN Zhongkui. Influence of harmonic and bounded noise excitations on chaotic motion of Duffing oscillator with homoclinic and heteroclinic orbits[J]. Acta physica Sinica, 2006,55(4):1678-1686 (in Chinese).

[23] 冯俊,徐伟,顾仁财,等. 有界噪声与谐和激励联合作用下 Duffing-Rayleigh 振子的 Melnikov 混沌[J]. 物理学报,2011,60(9):170-177.
FENG Jun,XU Wei,GU Rencai,et al. Melnikov chaos in Duffing-Rayleigh oscillator subjected to combined bounded noise and harmonic excitations[J]. Acta physica Sinica,2011,60(9):170-177 (in Chinese).

[24] 郑建华. 复分析[M]. 北京:清华大学出版社,2000.

[25] 王龙飞. 复合材料层合杆的动力屈曲和后屈曲及混沌行为研究[D]. 太原:太原理工大学,2015.

(编辑　黄崇亚)

(上接第 774 页)

[11] WU J,LIU Z. Modeling of flow stress in orthogonal micro-cutting process based on strain gradient plasticity theory[J]. International journal of advanced manufacturing technology,2010,46(1/2/3/4):143-149.

[12] 张海幸. 考虑尺度效应的 Inconel718 微铣削过程仿真及切削参数优化[D]. 大连:大连理工大学,2018.

[13] 司良英,邓关宇,吕程,等. 基于 Voronoi 图的晶体塑性有限元多晶几何建模[J]. 材料与冶金学报,2009,8(3):193-197.
SI Liangying,DENG Guanyu,LÜ Cheng,et al. Geometric modeling of crystal plastic finite element polycrystals based on Voronoi diagrams[J]. Journal of materials and metallurgy,2009,8(3):193-197(in Chinese).

[14] LI J,CHOU Y. The role of dislocations in the flow stress grain size relationships[J]. Metallurgical and materials transactions B,1970,1(5):1145-1159.

[15] DING H,SHEN N,SHIN Y C. Thermal and mechanical modeling analysis of laser-assisted micro-milling of difficult-to-machine alloys [J]. Journal of materials processing tech,2012,212(3):601-613.

[16] JOHNSON G R,COOK W H. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains,strain rates,temperatures and pressures[J]. Engineering fracture mechanics,1985,21(1):31-48.

(编辑　张璐)